EN ÇOK OLABİLİRLİK YÖNTEMİ

En çok olabilirlik yöntemi tahmin edicileri elde etme yöntemleri arasında en popüler olanıdır. Bu yöntemin en önemli özelliklerinden biri elde edilen tahmin edicilerin asimptotik olarak yansız ve küçük varyanslı olmalarıdır. Dezavantajı ise bazı durumlarda tahmin edicilerin elde edilmeleri sırasındaki maksimizasyon problemlerinin çözümünde sıkıntılar çekilmesidir.

Tanım: $X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklemi olasılık (yoğunluk) fonksiyonu f(x;θ) olan kitleden alınan bir örneklem olmak üzere θ parametresi için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta ; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta)$$

şeklindedir. Bu olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Yani θ ‘nın en çok olabilirlik tahmin edicisi

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\theta £ \theta} L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Genellikle olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi yerine fonksiyonun logaritması maximize edilir. Bu fonksiyon log $L(\theta ; x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklindedir.

Örnek: $X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x ; \theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x > 0, \theta > 0 \\ 0 \ , & dd \end{cases}$$

şeklinde verilen θ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. θ parametresinin en çok tahmin edicisini bulunuz?

Çözüm: Olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n ; \theta)$$

Doç.Dr. Pelin KASAP

$$= \frac{1}{\theta} . e^{-\frac{x_1}{\theta}} \ldots \frac{1}{\theta} . e^{-\frac{x_n}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta^n} . e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Olabilirlik fonksiyonunun ln i alındığında

$$\ln L\ (\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n\ ) = -n \ln(\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ve bu fonksiyonun θ parametresine göre türevi alınıp 0 ‘a eşitlendiğinde

$$\left.\frac{\partial \ln L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n\ )}{\partial \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$-\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}^2} = 0$$

$$-\ n\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

elde edilir. θ parametresine göre ikinci türev alındığında

$$\left.\frac{\partial^2\ lnL(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n\ )}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = \hat{\theta}} = -\ n\ (-\frac{1}{\theta^2}) - \frac{2\theta \sum_{,=1}^{n} x_i}{\theta \bar{X}^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{\bar{X}^2} - \frac{2n\bar{X}}{\bar{X}^3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{\bar{X}^2} - \frac{2n}{\bar{X}^2} = -\frac{n}{\bar{X}^2} < 0$$

Doç.Dr. Pelin KASAP

olduğundan $\hat{\theta} = \bar{X}$, θ parametresi için En Çok Olabilirlik tahmin edicisidir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.

(6) Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H. Ve Karabulut, İ. (2006). Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

(7) Casella, G. ve Berger, R.L. (2002). Statistical Inference, Second Edition, Duxbury.

Doç.Dr.Pelin KASAP